Dossier n°4 : Exemples d'expériences aléatoires et calculs de probabilités attachées à ces expériences dans le cas de tirages avec ou sans remise. Exemples s'y ramenant.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 24 août 2003.
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les élèves commencent à étudier quelques expériences aléatoires à travers des simulations en classe de seconde.

L'étude des probabilités débute en Première S et ES. On modélise quelques expériences de référence (lancers de dé, de pièces, tirages au hasard dans une urne).

L'étude des probabilités se poursuit en Terminale S avec l'introduction de nouvelles notions et du dénombrement.

Je choisis donc de situer ce dossier en Première et en Terminale S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Dans la plupart des cas, une expérience aléatoire peut se ramener à l'une des expériences de référence suivantes :

- le tirage d'une boule dans une urne en contenant n (exemples : lancer d'un dé, d'une pièce) ;
- le tirage de p boules ($p \geq 2$) successivement avec remise ou sans remise ou simultanément dans un urne en contenant n.

(Ce résultat a notamment été montré par Bernoulli).

Il est donc nécessaire pour les élèves de savoir calculer des probabilités concernant ces deux types d 'expériences.

L'objectif de ce dossier est donc de présenter des exemples d'expériences aléatoires consistant à de tels tirages ou s'y ramenant.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter quatre exercices :

- l'exercice n°1 propose d'étudier les tirages avec ou sans remise sur une même urne ;
- l'exercice n°2 est un exemple de situation conduisant à un tirage sans remise ;
- l'exercice n°3 est un exemple de situation se ramenant à un tirage avec remise ;
- l'exercice n°4 est un exemple de situation se ramenant à un tirage avec remise.

Rappelons, avant de présenter plus en détail ces exercices, le principe des différents tirages cités précédemment.

<u>Tirage de p boules ($p \geq 2$) successivement dans une urne en contenant n :</u>

Un tirage de deux éléments successivement se traduit mathématiquement par un couple. Plus généralement, un tel tirage de p éléments se traduit par un p-uplet.

a) <u>Tirage successif avec remise :</u>

Une même boule peut être extraite plusieurs fois. On retrouve donc à chaque nouveau tirage la même situation que pour le tirage qui précède. Le résultat d'un tel tirage est une p-liste.

b) <u>Tirage successif sans remise :</u>

On ne peut pas avoir répétition d'un même élément. Le résultat de l'expérience est donc un arrangement de p boules parmi n.

Tirage de p boules ($p \geq 2$) simultanément dans une urne en contenant n :

Un tirage de plusieurs éléments simultanément se traduit mathématiquement par une partie. Le résultat d'un tel tirage est donc une combinaison de p boules parmi n.

Je justifierai la présence des tirages simultanés lors de la présentation de l'exercice n°1 puisque ce type de tirage n'est pas mentionné dans l'énoncé du dossier.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Calculer la probabilité d'un même événement lors d'un tirage dans une urne de trois façons différentes : tirage simultané, tirage successif sans remise et tirage successif avec remise.

Objectifs :

- Mettre en évidence la différence entre un tirage avec remise et un tirage sans remise.
- Constater sur ce cas particulier que les probabilités sont les mêmes pour des tirages simultanés et des tirages successifs sans remise.

Pour cette raison, on se limitera dans le reste du dossier aux cas des tirages successifs avec ou sans remise.

Outils :

- Dénombrement des combinaisons ;
- Dénombrement des arrangements ;
- Dénombrement des p-listes ;
- Principe de la somme.

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer les chances d'un candidat ayant fait l'impasse sur n leçons parmi 100 (dans un cas particulier et dans le cas général) de tomber sur des sujets qu'il connaît.

Méthode : Considérer une tirage successif sans remise.

Outils :

- Probabilités conditionnelles ;
- Construction d'arbres.

III.3 Exercice n°3.

But : Déterminer des probabilités sur l'issue d'un sondage.

Méthode : Se ramener à des tirages successifs avec remise dans une urne contenant des boules de deux couleurs en proportions données par les caractéristiques de la population sondée.

Outils :

- Principe multiplicatif.

III.4 Exercice n°4.

But : Déterminer les chances de gagner un pari.

*Méthode :*Se ramener à des tirages successifs avec remise dans une urne.

Outils :

- Evénement contraire ;
- Principe multiplicatif.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (TP1 p 206 Fractale TS 1998).

Une urne contient 10 boules distinctes, indiscernables au toucher : 5 rouges, 3 noires et 2 blanches. De cette urne, on tire trois boules suivant diverses modalités. Dans chacun des cas, on se propose de calculer la probabilité de l'événement A : « tirer trois boules de même couleur ».

1. *Tirages simultanés*.

Les trois boules sont tirées simultanément.

a) Pourquoi peut-on considérer que tous les tirages sont équiprobables ? Quel est le cardinal de l'univers Ω_1 de l'expérience ?

b) De combien de façons peut-on choisir trois boules rouges ?

c) Dénombrer les tirages possibles de trois boules rouges, de trois boules noires puis de trois boules blanches et montrer que card(A) = $\binom{5}{3}+\binom{3}{3}$.

d) Vérifier que p(A) = $\frac{11}{120}$.

2. *Tirages successifs sans remise.*

On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Reprendre les questions de 1. dans ce cas. Que remarque-t-on ?

3. *Tirages successifs avec remise.*

On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne. Reprendre les questions de 1. dans ce cas.

IV.2 Exercice n°2 (n°52 p 288, Terracher TS 2002).

1. Lors de la préparation d'un concours, un candidat n'a étudié que 50 des 100 leçons possibles à l'oral. On a disposé 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat, lorsqu'il se présente à l'oral, tire successivement deux papiers. Calculer la probabilité :

a) qu'il ne connaisse aucun des deux sujets ;

b) qu'il connaisse les deux sujets ;

c) qu'il connaisse un seul des sujets ;

d) qu'il en connaisse au moins un.

2. On considère à présent que le candidats a étudié n des 100 leçons ($n \leq 100$) et a réalisé une impasse sur les autres.

a) Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un des deux sujets ?

b) Déterminer les entiers n tels que $p_n \geq 0{,}95$.

IV.3 Exercice n°3 (n°2 p 265, Terracher 1ère S 2001).

Dans une population, 25% des gens possèdent un ordinateur. On réalise un sondage en tirant au sort des individus au hasard (une même personne peut être choisie plusieurs fois). Quelle est la probabilité que, parmi les trois premiers individus sondés :

a) les trois possèdent un ordinateur (événement A) ?

b) deux personnes exactement possèdent un ordinateur (événement B) ?

IV.4 Exercice n°4 (problème n°2 p 277, Terracher TS 2002).

Dans une classe de 34 élèves, est-il raisonnable de parier que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour de l'année ?

V Commentaires.

a) L'exercice n°2 ne vous rappelle-t-il pas une situation bien connue des étudiants préparant le CAPES ? Vous pouvez y faire référence, notamment lors de la dernière question, avec une note d'humour, mais sans en abuser…

b) L'exercice n°4 doit être placé en dernier parmi ces exercices puisqu'il est posé de façon ouverte, sans aucune indication pour les élèves, et c'est donc celui représentant la plus grande difficulté.